Adı Soyadı :

Numara :

09.02.2024

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için $\alpha'(t)=(t^2,t,e^t)$ ve $\alpha(0)=(1,0,-5)$' ise $\alpha : I \to E^3$ eğrisini bulunuz.

SORU 2: Gradient fonksiyonunu tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

SORU 3: $\vec{V}=(2,2,-1)\in IR^3$, $P=\left(\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)\in E^3$ verilsin. $f=x_1^2\cos x_2+x_3^2\sin x_2$ fonksiyonu için $\vec{V_P}[f]$ yi bulunuz.

SORU 4: $F:E^n \to E^m$ dönüşümünün F_* türev dönüşümüne

$$\phi=\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P , 1\le i\le n\right\}\subset T_{E^n}(P) \text{ ve } \psi=\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{F(P)}, 1\le j\le m\right\}\subset T_{E^m}(F(P))$$

bazlarına göre karşılık gelen matrisi bulunuz.

SORU 5: $P_0=(0,0,0)$, $P_1=(2,-1,4)$, $P_2=(1,0,1)$, $P_3=(-3,1,0)$ olmak üzere $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ nokta cümlesinin IR^3 de bir afin çatı olduğunu gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar

Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Diferansiyel Geometri I Bütünleme Cevap Anahtarı

Soru 1) : $\alpha : I \to E^3$

$\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$, $\alpha(0) = (1, 0, -5)$

$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$

$= (t^2, t, e^t)$

$\alpha_1'(t) = t^2 \Rightarrow \alpha_1(t) = \frac{t^3}{3} + c_1$

$\alpha_2'(t) = t \Rightarrow \alpha_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_2$

$\alpha_3'(t) = e^t \Rightarrow \alpha_3(t) = e^t + c_3$

$\Rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3} + c_1 , \frac{t^2}{2} + c_2 , e^t + c_3 \right)$

$t = 0$ için

$\alpha(0) = (0 + c_1, 0 + c_2, 1 + c_3) = (1, 0, -5) \Rightarrow c_1 = 1$

$c_2 = 0$

$c_3 = -6$

O halde

$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 1, \frac{t^2}{2}, e^t - 6 \right)$ #

Soru 2) Defter notlarına bakınız.

Soru 3: $\vec{v} = (2, 2, -1)$ $\qquad f = x_1^2 \cos x_2 + x_3^2 \sin x_2$

$P = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right)$

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \underbrace{v_1}_{2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p}_{2x_1 \cos x_2 |_p} + \underbrace{v_2}_{2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p}_{-x_1^2 \sin x_2 + x_3^2 \cos x_2 |_p} + \underbrace{v_3}_{-1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p}_{2x_3 \sin x_2 |_p}$$

$$= 2 \cdot 2\underbrace{x_1(p)}_{\frac{\pi}{2}} \cos \underbrace{x_2(p)}_{0} \cancel{- 2\, \underbrace{x_1^2(p)}_{\frac{\pi^2}{4}} \sin \underbrace{x_2(p)}_{0}} + 2 \cdot \underbrace{x_3^2(p)}_{\frac{\pi}{4}} \cos \underbrace{x_2(p)}_{0} \cancel{- 2\, \underbrace{x_3(p)}_{\frac{\pi}{4}} \sin \underbrace{x_2(p)}_{0}}$$

$$= 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot 1$$

$$= 2\pi + \frac{\pi^2}{2}$$

Soru 4: Ders notlarına bakınız

Soru 5: $P_0 = (0,0,0)$

$P_1 = (2,-1,4)$

$P_2 = (1,0,1)$

$P_3 = (-3,1,0)$

P_0 baslangıç noktası kabul edelim. Buna göre

$\overrightarrow{P_0P_1} = (2,-1,4)$

$\overrightarrow{P_0P_2} = (1,0,1)$ öü $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı mıdır?

$\overrightarrow{P_0P_3} = (-3,1,0)$

lineer bağımsız Germe

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$ O halde bu sistem lineer bağımsız.

3 boyutlu uzayda üç vektör lineer bağımsız olduğunda germe koşulu sağlar. O halde $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır.

Dolayısıyla $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ bir afin çatıdır.